

## **Введение**

**Физика** — это наука, изучающая общие свойства движения вещества и поля.  
(А.И.Иоффе).

**Физика** — наука о простейших формах движения материи и соответствующих им наиболее общих законах природы. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая, электрическая, магнитная и т.д.) являются составляющими более сложных форм движения материи (химических, биологических и др.), поэтому физика является основой для других естественных наук (астрономия, биология, химия, геология и др.).

**Физика** — база для создания новых отраслей техники — фундаментальная основа подготовки инженера.

В своей основе **физика** — экспериментальная наука: ее законы базируются на фактах, установленных опытным путем. В результате обобщения экспериментальных фактов устанавливаются **физические законы** — устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе, устанавливающие связь между физическими величинами.

Для установления количественных соотношений между физическими величинами их необходимо измерять, т.е. сравнивать их с соответствующими эталонами. Для этого вводится система единиц, которая постулирует **основные единицы** физических величин и на их базе определяет единицы остальных физических величин, которые называются **производными единицами**.

**Международная Система единиц (СИ) (System International – SI).**

**Основные единицы:**

**Метр** (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за  $\frac{1}{299\,792\,458}$  с.

**Килограмм** (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

**Секунда** (с) — время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

**Ампер** (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, создает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Ньютона на каждый метр длины.

**Кельвин** (К) —  $\frac{1}{273,16}$  часть термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль** (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12г изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ .

**Кандела** (кд) — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  герц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $\frac{1}{683}$  Вт/ср.

**Дополнительные единицы системы СИ:**

**РадIAN** (рад) — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

**Стерadian** (ср) — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной равной радиусу сферы.

**Производные единицы** устанавливаются на основе физических законов, связывающих их с основными единицами. **Например**, производная единица скорости (1 м/с) получается из формулы равномерного прямолинейного движения  $v = s/t$ .

## Кинематика

### 1. Механика и ее структура. Модели в механике.

**Механика** — это часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

**Механическое движение** — это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Обычно под механикой понимают **классическую механику**, в которой рассматриваются движения макроскопических тел, совершающиеся со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме.

Законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, изучаются **релятивистской механикой**.

**Квантовая механика** изучает законы движения атомов и элементарных частиц.

#### Разделы механики:

**Кинематика** — изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

**Динамика** — изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

**Статика** — изучает законы равновесия системы тел.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные **упрощенные физические модели**:

- **Материальная точка** — тело, форма и размеры которого несущественны в условиях данной задачи.
- **Абсолютно твердое тело** — тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь и расстояние между любыми двумя точками этого тела остается постоянным.
- **Абсолютно упругое тело** — тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.
- **Абсолютно неупругое тело** — тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

**Любое движение твердого тела** можно представить как **комбинацию** поступательного и вращательного движений.

**Поступательное движение** — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

**Вращательное движение** — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения**.

## 2. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

**Тело отсчета** — произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение остальных тел.

**Система отсчета** — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета.

Наиболее употребительная система координат — **декартова** — ортонормированный базис которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными векторами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , проведенными из начала координат.

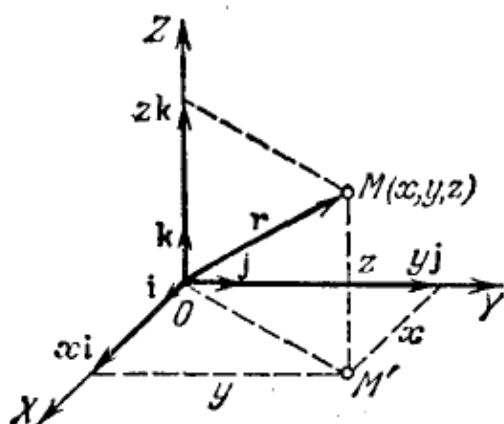
Положение произвольной точки  $M$  характеризуется **радиусом-вектором**  $\vec{r}$ , соединяющим начало координат  $O$  с точкой  $M$ .

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Движение материальной точки полностью определено, если декартовы координаты материальной точки заданы в зависимости от времени:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

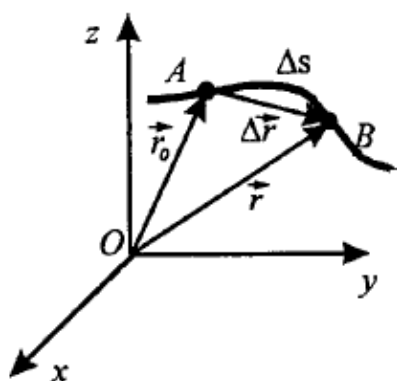
Эти уравнения называются **кинематическими уравнениями движения точки**. Они эквивалентны одному векторному уравнению движения точки:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .



Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета называется **траекторией**. Уравнение траектории можно получить, исключив

параметр  $t$  из кинематических уравнений.

В зависимости от формы траектории движение может быть **прямолинейным** или **криволинейным**.



**Длиной пути** точки называется сумма длин всех участков траектории, пройденных этой точкой за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta s = \Delta s(t)$ . Длина пути — **скалярная** функция времени.

**Вектор перемещения**  $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$  — вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени).

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}$$

В пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  длина пути по хорде  $\Delta s$  и длина хорды  $\Delta r = |\Delta \vec{r}|$  будут все меньше отличаться:

$$ds = |d\vec{r}| = dr.$$

### 3. Скорость

**Скорость** — это *векторная* величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

**Вектором средней скорости** за интервал времени  $\Delta t$  называется отношение приращения  $\Delta \vec{r}$  радиуса-вектора точки к промежутку времени  $\Delta t$   $\left| \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением  $\Delta \vec{r}$ .

**Единица скорости** — м/с.

**Мгновенная скорость** — векторная величина, равная первой производной по времени от радиуса-вектора  $\vec{r}$  рассматриваемой точки:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Вектор мгновенной скорости направлен по *касательной* к траектории в сторону движения. Модуль мгновенной скорости (*скалярная величина*) равен первой производной пути по времени.

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (\text{Отсюда: } ds = v dt.)$$

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. Поэтому можно ввести *скалярную* величину  $\langle v \rangle$  — **среднюю скорость неравномерного движения** (другое название — *средняя путевая скорость*).

**Длина пути**  $s$ , пройденного точкой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , задается интегралом:

$$\left| \begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ s &= \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \end{aligned} \right|$$

При **прямолинейном движении** точки направление вектора скорости сохраняется неизменным.

Движение точки называется **равномерным**, если модуль ее скорости не изменяется с течением времени ( $v = \text{const}$ ), для него

$$s = v \cdot \Delta t$$

Если модуль скорости увеличивается с течением времени, то движение называется **ускоренным**, если же он убывает с течением времени, то движение называется **замедленным**.

### 4. Ускорение.

**Ускорение** — это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

**Среднее ускорение** в интервале времени  $\Delta t$  — векторная величина, равная отношению изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  к интервалу времени  $\Delta t$ :  $\left| \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right|$

**Мгновенное ускорение** материальной точки — векторная величина, равная первой производной по времени скорости рассматриваемой точки (второй производной по времени от радиуса-вектора этой же точки):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

**Единица ускорения** — м/с<sup>2</sup>.

В общем случае плоского криволинейного движения вектор ускорения удобно представить в виде суммы двух проекций:  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

**Тангенциальное** ускорение  $\vec{a}_\tau$  характеризует быстроту изменения скорости по модулю (рис.(A)), его величина:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

**Нормальное (центростремительное)** ускорение  $\vec{a}_n$  направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны  $O$  и характеризует

быстроту изменения направления вектора скорости точки. Величина нормального ускорения  $a_n$  связана со скоростью  $v$  движения по кругу и величиной радиуса  $R$  (рис.(B)). Пусть  $|v_1| = |v_2| = v$ . Тогда для  $\alpha \rightarrow 0$ :  $\Delta v_n = v \sin \alpha \approx v \cdot \alpha$ ,  $\Delta s = v \cdot \Delta t \approx R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha \approx (v \cdot \Delta t) / R$ , откуда:

$$\Delta v_n \approx \frac{v^2}{R} \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

Величина **полного** ускорения (рис.(C)):

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

#### Виды движения:

- 1)  $\vec{a}_\tau = 0$ ,  $\vec{a}_n = 0$  — **прямолинейное равномерное** движение:  $\vec{a} = 0$ .
- 2)  $\vec{a}_\tau = a = \text{const}$ ,  $\vec{a}_n = 0$  — **прямолинейное равнопеременное (равноускоренное)** движение. Если  $t_0 = 0$ , то

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t}; \quad v = v_0 + a \cdot t; \quad s = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

- 3)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = \text{const} = \frac{v^2}{R}$  — **равномерное движение по окружности.**

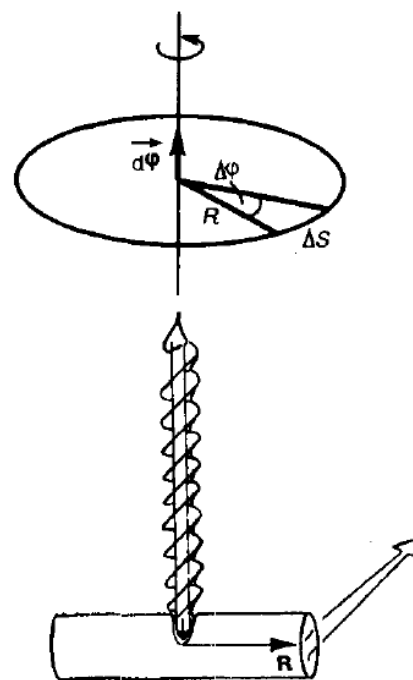
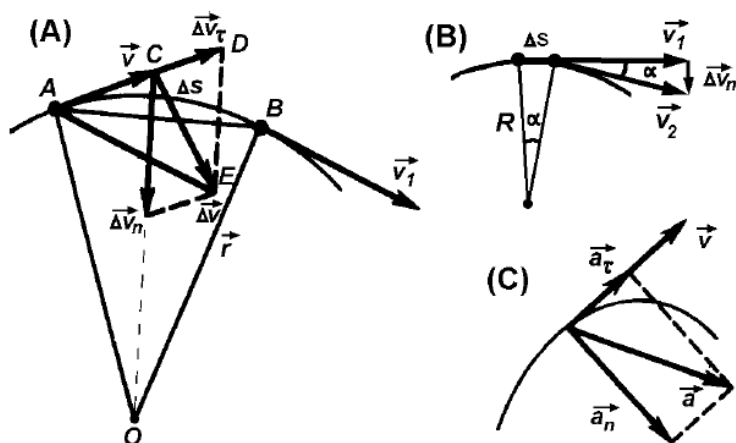
- 4)  $\vec{a}_\tau \neq 0$ ,  $\vec{a}_n \neq 0$  — **криволинейное равнопеременное движение.**

#### 5. Кинематика вращательного движения.

При описании вращательного движения удобно пользоваться **полярными координатами**  $R$  и  $\varphi$ , где  $R$  — **радиус** — расстояние от полюса (центра вращения) до материальной точки, а  $\varphi$  — **полярный угол** (угол поворота).

**Элементарные повороты** (обозначаются  $\Delta \vec{\varphi}$  или  $d\vec{\varphi}$ ) можно рассматривать как **псевдовекторы**.

**Угловое перемещение**  $d\vec{\varphi}$  — векторная величина, модуль которой равен углу поворота, а направление совпадает с направлением поступательного движения **правого винта**.

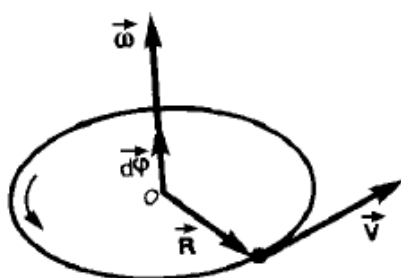


**Угловая скорость:**  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$ . **Угловое ускорение:**  $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$

Вектор  $\vec{\omega}$  **направлен** вдоль оси вращения так же как и вектор  $d\vec{\varphi}$ , т.е. по правилу правого винта. Вектор  $\vec{\beta}$  направлен вдоль оси вращения в сторону вектора приращения угловой скорости (при ускоренном вращении вектор  $\vec{\beta}$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$ , при замедленном — противонаправлен ему).

**Единицы угловой скорости и углового ускорения** — рад/с и рад/с<sup>2</sup>.

Линейная скорость точки связана с угловой скоростью и радиусом траектории соотношением:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega R.$$


В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как **векторное произведение**:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

По определению векторного произведения (см. стр.1-29) его модуль равен  $|\vec{v}| = \omega R \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{R}$ , а направление совпадает с направлением поступательного

движения правого винта при его вращении от  $\vec{\omega}$  к  $\vec{R}$ .

**При равномерном вращении:**  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$ , следовательно  $\varphi = \omega \cdot t$ .

Равномерное вращение можно характеризовать **периодом вращения**  $T$  — временем, за которое точка совершает один полный оборот,  $2\pi = \omega \cdot T$

**Частота вращения** — число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени:

**Единица частоты вращения** — герц (Гц).

**При равноускоренном вращательном движении**  $\beta = \text{const}$ :

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t; \quad \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta \cdot t^2}{2}; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R;$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta; \quad s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \omega R dt = R \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi}{dt} dt = R\varphi$$

$$s = R\varphi$$

$$v = R\omega$$

$$a_\tau = R\beta$$

$$a_n = R\omega^2$$

## Динамика материальной точки

### 6. Первый закон Ньютона.

Материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**. Первый закон Ньютона

постулирует существование **инерциальных систем отсчета** — таких, относительно которых, материальная точка, не подверженная воздействию других тел, движется равномерно и прямолинейно.

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие **силы**. Для описания *инерционных* свойств тел вводится понятие **массы**.

## 7. Сила.

**Сила** — векторная величина, являющаяся мерой механического действия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет форму и размеры.

Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при ударе, трении, давлении друг на друга и т. п.), так и между удаленными телами.

**Особая форма материи**, связывающая частицы вещества в единые системы и передающая с конечной скоростью действие одних частиц на другие, называется **физическим полем** или просто **полем**.

Взаимодействие между удаленными телами осуществляется посредством связанных с ними гравитационных и электромагнитных полей.

Пользуясь понятием силы, в механике обычно говорят о движении и деформации рассматриваемого тела *под действием приложенных к нему сил*. При этом, конечно, каждой силе всегда соответствует какое-то определенное тело или поле, действующее с этой силой.

Сила  $\vec{F}$  полностью задана, если указаны ее модуль  $F$ , направление в пространстве и точка приложения.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется **линией действия силы**. **Центральными** называются силы, которые всюду направлены вдоль прямых, проходящих через одну и ту же неподвижную точку — *центр сил*, и зависят только от расстояния до центра сил.

Поле, действующее на материальную точку с силой  $\vec{F}$ , называется **стационарным полем**, если оно не изменяется с течением времени.

Одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой **равнодействующей**, или **резльтирующей**, силой и *равной их геометрической сумме*.

**Единица силы** — **ньютон (Н)**: 1Н — сила, которая массе в 1кг сообщает ускорение  $1\text{ м/с}^2$  в направлении действия силы.

## 8. Механические системы.

**Механической системой** называется совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

Тела, не входящие в состав исследуемой механической системы, называются **внешними телами**. Силы, действующие на систему со стороны внешних тел, называются **внешними силами**.

**Внутренними силами** называются силы взаимодействия между частями рассматриваемой системы.

Механическая система называется **замкнутой**, или **изолированной, системой**, если она не взаимодействует с внешними телами (на нее не действуют внешние силы).

Тело называется **свободным**, если на его положение и движение в пространстве не наложено никаких ограничений, и — **несвободным** — если на его возможные положения и движения наложены те или иные ограничения,

называемые в механике **связями**. Несвободное тело можно рассматривать как свободное, заменив действие на него тел, осуществляющих связи, соответствующими силами. Эти силы называются **реакциями связей**, а все остальные силы, действующие на тело, — **активными силами**.

## 9. Масса.

**Масса** — физическая величина, одна из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства.

**Единица массы** — килограмм (кг).

**Плотностью** тела  $\rho$  в данной его точке  $M$  называется отношение массы  $dm$  малого элемента тела, включающего точку  $M$ , к величине  $dV$  объема этого элемента.

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

## 10. Импульс.

Векторная величина  $\vec{p}$ , равная произведению массы  $m$  материальной точки на ее скорость  $\vec{v}$ , и имеющая направление скорости, называется **импульсом**, или **количеством движения**, этой материальной точки.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

## 11. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона — основной закон динамики поступательного движения — отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

**Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела):**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{или} \quad \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Более общая формулировка второго закона Ньютона: **скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.**

Векторная величина  $\vec{F}dt$  называется **элементарным импульсом силы**  $\vec{F}$  за **малое** время  $dt$  ее действия. Импульс силы за промежуток времени  $t_1$

определяется интегралом  $\int_0^{t_1} \vec{F}dt$ . Согласно второму закону Ньютона **изменение**

**импульса материальной точки равно импульсу действующей на нее силы:**

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \quad \text{и} \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

Основной закон динамики материальной точки выражает принцип причинности в классической механике — **однозначная связь** между изменением с течением времени состояния движения и положения в пространстве материальной точки и действующие на нее силой, что позволяет, зная начальное состояние материальной точки, вычислить ее состояние в любой последующий момент времени.



## 12. Принцип независимости действия сил.

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Например, *нормальное и тангенциальное ускорения* материальной точки определяются соответствующими составляющими силы:

$$\begin{aligned}\vec{a}_\tau &= \frac{\vec{F}_\tau}{m}; & a_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{F_\tau}{m}; & F_\tau &= m \frac{dv}{dt} \\ \vec{a}_n &= \frac{\vec{F}_n}{m}; & a_n &= \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{F_n}{m}; & F_n &= \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R\end{aligned}$$

Сила  $\vec{F}_n$ , сообщающая материальной точке *нормальное* ускорение, направлена к центру кривизны траектории и потому называется **центростремительной силой**.

## 13. Третий закон Ньютона

Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Эти силы приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной системы материальных точек, поскольку позволяет свести любое взаимодействие к силам парного взаимодействия между материальными точками.

## 14. Закон сохранения импульса

**Импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени (сохраняется):**

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства: при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства не изменяются (не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета).

## 15. Закон движения центра масс.

В механике Ньютона из-за независимости массы от скорости *импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс*. **Центром масс** (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \quad \left| \begin{array}{l} \text{где } m_i \text{ и } \vec{r}_i \text{ — соответственно масса и радиус-вектор } i\text{-й} \\ \text{материальной точки; } n \text{ — число материальных точек в} \\ \text{системе; } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ — масса системы.} \end{array} \right.$$

В этом случае импульс системы:  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C$

**Закон движения центра масс:** центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.  $m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

Из закона сохранения импульса следует, что **центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.**

## **16. Силы в механике.**

### **1) Силы тяготения (гравитационные силы).**

В системе отсчета связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$  действует сила:

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

называемая **силой тяжести** — сила, с которой тело притягивается Землей. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым ускорением  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ , называемым **ускорением свободного падения**.

**Весом тела** — называется сила, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору или натягивает нить подвеса.

**Сила тяжести действует всегда**, а вес проявляется лишь тогда, когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Сила тяжести равна весу тела только в том случае, когда ускорение тела относительно земли равно нулю. В противном случае  $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$ , где  $\vec{a}$  — ускорение тела с опорой относительно Земли. Если тело **свободно** движется в поле силы тяготения, то  $\vec{a} = \vec{g}$  и вес равен нулю, т.е. тело будет невесомым.

**Невесомость** — это состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести.

**2) Силы упругости** возникают в результате взаимодействия тел, сопровождающегося их деформацией.

Упругая сила пропорциональна смещению частицы из положения равновесия и направлена к положению равновесия:

$$\vec{F} = -k\vec{r},$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия,  $k$  — упругость. Примером такой силы является **сила упругости деформации пружины** при растяжении или сжатии:

$$F = -kx,$$

где  $k$  — жесткость пружины,  $x$  — упругая деформация.

**3) Сила трения скольжения** возникает при скольжении данного тела по поверхности другого:

$$F_{\text{тр}} = kN,$$

где  $k$  — коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей;  $N$  — сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу. Сила трения направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению данного тела относительно другого.

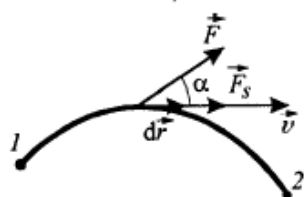
### 17. Работа, энергия, мощность.

**Энергия** — это универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную... Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел.

**Работа силы** — это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

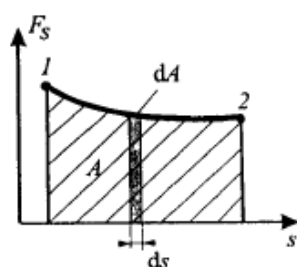
При *прямолинейном* движении тела под действием *постоянной* силы  $\vec{F}$ , которая составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлением перемещения, работа этой силы равна:

$$A = F_s s = F s \cos \alpha$$



В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому этой формулой пользоваться нельзя. Однако на элементарном (бесконечно малом) перемещении  $d\vec{r}$  можно ввести *скалярную* величину — **элементарную работу  $dA$  силы  $\vec{F}$** :

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \cos \alpha \cdot ds = F_s ds$$



Тогда **работа силы на участке траектории** от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути:

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = \int_1^2 F_s ds$$

Если зависимость  $F_s$  от  $s$  представлена графически, то работа  $A$  определяется площадью заштрихованной фигуры (см. рисунок).

**Консервативной (потенциальной)** называют силу, работа которой определяется только начальным и конечным положениями тела и не зависит от формы пути. Консервативными силами являются силы тяготения, упругости. Все центральные силы консервативны. Примером **неконсервативных** сил являются силы трения.

Чтобы охарактеризовать *скорость* совершения работы, вводят понятие **мощности**. Мощность  $N$  равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = (\vec{F}, \vec{v})$$

**Единица работы** — джоуль (Дж) — работа совершаемая силой 1Н на пути 1м: 1Дж=1Н·м.

**Единица мощности** — ватт (Вт): 1Вт — мощность, при которой за время 1с совершается работа 1Дж: 1Вт=1Дж/с.

### 18. Кинетическая и потенциальная энергия механической системы

**Кинетическая энергия** механической системы ( $K$ ) — это энергия механического движения этой системы.

Сила, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной

работы. Таким образом *приращение кинетической энергии частицы на элементарном перемещении равно элементарной работе на том же перемещении*:

$$dK = dA$$

Тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $v$ , обладает кинетической энергией:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v} = m v dv = dK \Rightarrow K = \int_0^v m v dv = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела. Поэтому кинетическая энергия: (1) является *функцией состояния* системы; (2) всегда *положительна*; (3) *неодинакова* в разных инерциальных системах отсчета.

**Потенциальная энергия** ( $W$ ) — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Потенциальная энергия системы, подобно кинетической энергии, является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

**Примеры потенциальной энергии:**

- 1) Потенциальная энергия тела массой  $m$  на высоте  $h$ :  $W = mgh$
- 2) Потенциальная энергия пружины, растянутой на длину  $x$ :  $W = \frac{kx^2}{2}$

**Единица** кинетической и потенциальной энергии — Джоуль (Дж).

## 19. Закон сохранения энергии.

**Полная механическая энергия системы** — энергия механического движения и взаимодействия:  $E = K + W$ , т.е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Закон сохранения энергии: в системе тел, между которыми действуют только **консервативные силы** полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем:

$$K + W = E = const$$

Это — **фундаментальный** закон природы. Он является следствием однородности времени — инвариантности физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. В консервативных системах полная механическая энергия *остаётся постоянной*. Могут лишь происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остаётся неизменной.

**Диссипативные системы** — системы, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, *полная механическая энергия системы не сохраняется*. Однако при "исчезновении" механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, **энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой**. В этом заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии — сущность неуничтожимости материи и ее движения.

## 20. Соударения

**Удар (соударение)** — столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

**Центральный удар** — удар при котором тела до удара движутся по прямой, проходящей через их центры масс.

**Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию. **Выполняются законы сохранения импульса и сохранения механической энергии.**

Обозначим скорости шаров массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара через  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , после удара — через  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$ . Рассмотрим прямой центральный удар. Законы

сохранения:  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m'_1 v'_1 + m_2 v'_2$ ,  $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$ .

$$\text{Отсюда: } v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

**Абсолютно неупругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}; \quad \text{При } m_1 = m_2 \quad \vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

**Не выполняется** закон сохранения механической энергии: вследствие деформации часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию тел (разогрев). Это уменьшение равно:

$$\Delta K = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad \text{Если } m_2 \gg m_1, \text{ то } v \ll v_1 \text{ и } \Delta K \approx K_1$$

## Механика твердого тела

### 21. Момент инерции.

**Моментом инерции материальной точки** относительно оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от оси:

**Моментом инерции системы** (тела) *относительно оси вращения* называется физическая величина, равная сумме произведений масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.

$$\left. \begin{aligned} J_i &= m_i r_i^2 \\ J &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \end{aligned} \right\}$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу  $J = \int_0^m r^2 dm$ , где интегрирование производится по объему тела.

**Главный момент инерции** — момент инерции относительно главной оси вращения *проходящей через центр масс*.

Момент инерции тела зависит от того, относительно какой оси оно вращается и как распределена масса тела по объему.

**Моменты инерции однородных тел массой  $m$ , имеющих правильную геометрическую форму и равномерное распределение массы по объему:**

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса $R$	Ось симметрии	$mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса $R$	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Шар радиусом $R$	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**:

Момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси  $z$  равен сумме момента его инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$J_z = J_C + ma^2$$

Например, момент инерции прямого тонкого стержня длиной  $l$  относительно оси, которая перпендикулярна стержню и проходит через его конец (эта ось отстоит на  $l/2$  от оси, проходящей через центр стержня):

$$J_z = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Таким образом величина момента инерции зависит от выбора оси вращения.

## **22. Кинетическая энергия вращения.**

Абсолютно твердое тело вращается около неподвижной оси  $z$  проходящей через него. Все точки движутся с одинаковой угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Кинетическая энергия тела:

$$K_{sp} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

где  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ .

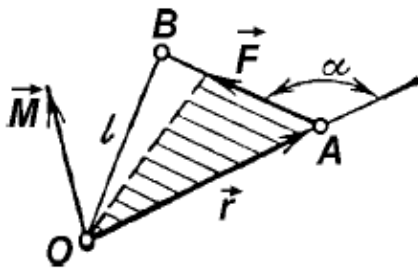
Если тело совершает поступательное и вращательное движения одновременно, то его полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий:

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}$$

Из сопоставления формул кинетической энергии для поступательного и вращательного движений видно, что **мерой инертности при вращательном движении служит момент инерции тела**.

## **23. Момент силы.**

**Моментом силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной точки  $O$**  называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-



вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Модуль момента силы:  $M = Fr \sin \alpha = Fl$ , где  $l = r \sin \alpha$  — **плечо силы** — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$ ;  $\alpha$  — угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

**Моментом силы относительно неподвижной оси  $z$**  — называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $\vec{M}$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$ . Значение момента не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $z$ .

#### 24. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

При повороте тела под действием силы  $\vec{F}$  на бесконечно малый угол  $d\varphi$  точка приложения силы  $A$  проходит путь  $ds = r d\varphi$  и работа равна:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi = M_z d\varphi.$$

Работа вращения тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dK = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega$$

Тогда  $M_z d\varphi = J_z \omega d\omega$ , или  $M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$ , откуда

**уравнение динамики вращательного движения твердого тела:**

Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство:

$$M_z = J_z \cdot \beta$$

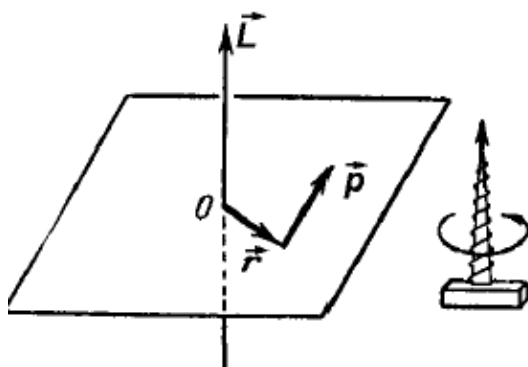
$$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$$

где  $J$  — **главный момент инерции тела** (момент инерции относительно главной оси).

#### 25. Момент импульса и закон его сохранения.

**Моментом импульса** (количества движения) **материальной точки  $A$  относительно неподвижной точки  $O$**  называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$



**Моментом импульса относительно неподвижной оси  $z$**  называется скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси. Значение момента импульса  $L_z$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $z$ .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси каждая точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $\vec{r}_i$  со скоростью  $\vec{v}_i$  перпендикулярной радиусу. Момент импульса отдельной частицы равен  $L_{iz} = m_i v_i r_i$  и направлен по оси в сторону,

определяемую правилом правого винта (совпадает с направлением вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ ).

**Момент импульса твердого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = J_z \omega$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \beta = M_z$$

В векторной форме:  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$  — еще одна форма уравнения

**динамики вращательного движения** твердого тела.

В замкнутой системе момент внешних сил  $\vec{M} = 0$ , следовательно и  $\dot{\vec{L}} = 0$ .

**Закон сохранения момента импульса:** момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени:  $\vec{L} = const$

Это — фундаментальный закон природы. Он является следствием изотропности пространства: инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

При равномерном вращении твердого тела относительно некоторой оси  $z$  закон сохранения момента импульса  $\vec{L} = const$  равносильно:  $J_z \omega = const$ .

## **26. Сопоставим основные величины и соотношения для поступательного движения тела и для его вращения вокруг неподвижной оси.**

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Перемещение	$d\vec{r}$	Угловое перемещение	$d\vec{\phi}$
Скорость	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
Ускорение	$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Угловое ускорение	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M}$
Импульс	$\vec{p}$	Момент импульса	$\vec{L}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\phi$
Кинетическая энергия	$mv^2 / 2$	Кинетическая энергия	$J_z \omega^2 / 2$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики	$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$
	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

## **Деформации твердого тела**

### **27. Деформации твердого тела**

Реальные тела не являются абсолютно упругими.

**Деформация** — это изменение формы и размеров твердых тел под действием внешних сил.

**Пластическая деформация** — это деформация, которая сохраняется в



теле после прекращения действия внешних сил.

*Деформация называется упругой*, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

Все виды деформаций (растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения (или сжатия) и сдвига.

**Напряжение  $\sigma$**  — физическая величина, численно равная упругой силе  $d\vec{F}_{elastic}$ , приходящейся на единицу площади  $dS$  сечения тела:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_{el}}{dS}$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, то напряжение **нормальное**, если — по касательной, то напряжение **тангенциальное**.

**Относительная деформация** — количественная мера, характеризующая степень деформации и определяемая отношением абсолютной деформации  $\Delta x$  к первоначальному значению величины  $x$ , характеризующей форму или размеры тела:

$$\frac{\Delta x}{x}$$

Так,

— **относительное изменение длины  $l$  стержня** (продольная деформация)  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

— **относительное поперечное растяжение (сжатие)  $\varepsilon'$** ,

где  $d$  — диаметр стержня.

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

Деформации  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  всегда имеют разные знаки:  $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

где  $\mu$  — положительный коэффициент, зависящий от свойств материала и называемый **коэффициентом Пуассона**.

## 28. Закон Гука.

Для малых деформаций относительная деформация  $\varepsilon$  пропорциональна напряжению  $\sigma$ :

$$\sigma = E\varepsilon$$

где  $E$  — коэффициент пропорциональности (модуль упругости), численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице.

Для случая одностороннего растяжения (сжатия) модуль упругости называется **модулем Юнга**.

Записав  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES}$ , получим  $F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \cdot \Delta l$  — **закон Гука**:

**удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе** (здесь  $k$  — коэффициент упругости).

## Элементы механики жидкостей

## 29. Давление в жидкости и газе.

Свойства жидкостей и газов во многом отличаются. Молекулы газа, совершая хаотическое движение, равномерно заполняют весь предоставленный им объем. В жидкостях, в отличие от газов, среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным. Жидкость, сохраняя объем, принимает форму сосуда, в котором она заключена.

Однако в ряде случаев, когда жидкости и газы можно рассматривать как сплошную среду, их поведение описывается одинаковыми законами — законами **гидроаэромеханики**. Поэтому пользуются единым термином "**жидкость**".

В физике используется физическая модель несжимаемой жидкости – жидкости, плотность которой всюду одинакова и не меняется со временем.

На каждый элемент поверхности  $\Delta S$  тела, помещенного в жидкость, со стороны молекул жидкости действует сила  $\Delta F$  направленная перпендикулярно поверхности.

**Давлением жидкости** называется физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

**Единица давления — паскаль (Па).** 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью  $1 \text{ м}^2$  ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ).

Давление при равновесии жидкостей или газов подчиняется закону Паскаля: Давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, поэтому свободная поверхность жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда.

Если жидкость **несжимаема**, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес  $P = \rho g Sh$ , а давление на нижнее основание изменяется **линейно** с высотой:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g Sh}{S} = \rho gh$$

Давление  $\rho gh$  называется **гидростатическим**.

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость действует сила, определяемая законом Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $V$  — объем погруженного в жидкость тела.

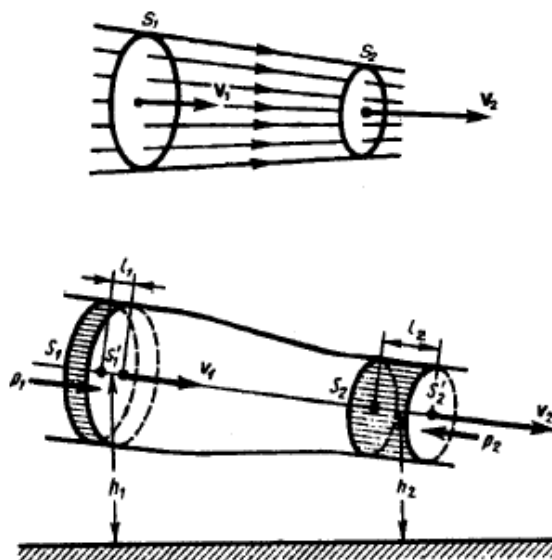
### 30. Уравнение неразрывности.

Движение жидкости называется **течением**, а совокупность частиц движущейся жидкости – **поток**.

Графически движение жидкостей изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в данный момент времени.

Линии тока проводятся так, чтобы густота их была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется **трубкой тока**.



Течение жидкости называется **установившимся** (или **стационарным**), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим трубку тока, выбрав два сечения  $S_1$  и  $S_2$ , перпендикулярные направлению скорости. За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  проходит объем жидкости  $Sv\Delta t$ . Если жидкость несжимаема, то через  $S_2$  за 1с пройдет такой же объем жидкости, что и через  $S_1$ :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{или} \quad Sv = \text{const} \quad \text{— уравнение неразрывности}$$

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

### 31. Уравнение Бернулли

**Идеальной жидкостью** называется воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения.

В стационарно текущей **идеальной жидкости** выбираем трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . По закону сохранения энергии изменение полной энергии жидкости массой  $m$  в местах сечений  $S_1$  и  $S_2$  равно работе внешних сил по перемещению этой массы жидкости:  $E_2 - E_1 = A$ .

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2, \quad A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad l_1 = v_1 \Delta t, \quad l_2 = v_2 \Delta t,$$

$$F_1 = p_1 S_1, \quad F_2 = -p_2 S_2. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

Согласно уравнению непрерывности, объем, занимаемый жидкостью,

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Используя  $m = \rho \Delta V$ , где  $\rho$  — плотность жидкости, получим

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} \quad \text{— уравнение Бернулли}$$

где  $p$  — **статическое давление** (давление жидкости на поверхности обтекаемого тела);  $\rho gh$  — **гидростатическое давление**;  $\frac{\rho v^2}{2}$  — **динамическое давление**.

Уравнение Бернулли — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости.

Из уравнения Бернулли и уравнения неразрывности следует, что при течении жидкости по трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах.

### 32. Вязкость (внутреннее трение)

**Вязкость** — это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

При перемещении одних слоев **реальной жидкости** относительно других возникают **силы внутреннего трения**, направленные по касательной к поверхности слоев.

Более быстрые слои ускоряют более медленные и наоборот, медленные слои тормозят прилегающие к ним быстрые слои. **Градиент скорости**  $\Delta v / \Delta x$  показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении  $x$  перпендикулярном направлению движения слоев.

**Сила внутреннего трения** пропорциональна градиенту скорости и рассматриваемой площади поверхности слоя  $S$ :

Коэффициент пропорциональности  $\eta$ , зависящий от природы жидкости, называется **динамической вязкостью** (или просто **вязкостью**).

**Единица вязкости** — паскаль-секунда — динамическая вязкость среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м<sup>2</sup> поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м<sup>2</sup>).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем больше силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

### 33. Два режима течения жидкостей.

Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы (рис. (а)).

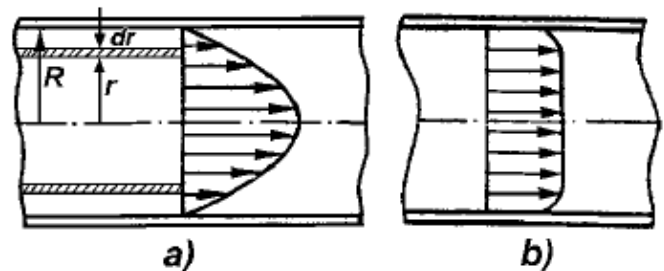
Течение называется **турбулентным (вихревым)**, если частицы жидкости переходят из слоя в слой (имеют составляющие скоростей, перпендикулярные течению). Это сопровождается интенсивным перемешиванием жидкости (газа) и вихреобразованием.

Скорость частиц быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно, вследствие интенсивного перемешивания (рис. (в)).

Количественно переход от одного режима течения к другому характеризуется **числом Рейнольдса**:

Здесь  $\gamma = \eta / \rho$  — кинематическая вязкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\langle v \rangle$  — средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $d$  — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \leq 1000$ ) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области  $1000 \leq Re \leq 2000$ , а при  $Re = 2300$  (для гладких труб) течение — турбулентное.



### 34. Методы определения вязкости.

**1. Метод Стокса** основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, плотностью  $\rho$  и радиусом  $r$ , падающий в жидкости вязкостью  $\eta$  и плотностью  $\rho'$  вертикально вниз со скоростью  $v$ , действуют три силы: сила тяжести  $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ , сила Архимеда  $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$  и сила сопротивления  $F = 6\pi\eta r v$ . при равномерном движении  $P - F_A - F = 0$ , откуда

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9v}$$

**2. Метод Пуазейля.** Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Рассмотрим капилляр радиусом  $R$  и длиной  $l$ . В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. а).

Сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность этого

слоя  $F = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$ . При установившемся течении эта сила уравновешивается силой давления, действующей на основание того же цилиндра

$-\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l = \Delta p \pi r^2$ , откуда  $dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$ . После интегрирования с учетом

того, что скорость жидкости у стенок равна нулю, получаем  $v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$ .

Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону (рис. а), причем вершина параболы лежит на оси капилляра. За время  $t$  из капилляра вытечет жидкость, объем которой

$$V = \int_0^R v l 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p l}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{2\pi \Delta p l}{4\eta l} \left( \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{\pi R^4 \Delta p l}{8\eta l}$$

откуда вязкость 
$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p l}{8 V l}$$

### Потенциальное поле сил.

**Потенциальное поле** — поле, в котором работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Силы, действующие в таких полях, называются **консервативными** (например, сила тяготения). Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной** (например, сила трения).

**Работа консервативных (потенциальных) сил** при элементарном изменении конфигурации системы равна **приращению потенциальной энергии**, взятому со знаком **минус**, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dW$$

Поскольку  $\vec{F}d\vec{r} = -dW$ , то  $W = -\int \vec{F}d\vec{r} + const$ , откуда  $\vec{F} = -\text{grad}W = -\nabla W$ , где вектор  $\text{grad}W = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k}$  называется **градиентом** скаляра

$W$  и обозначается  $\nabla W \equiv \text{grad}W$ . Символ  $\nabla$  ("набла") обозначает символический вектор, называемый оператором Гамильтона или набла-оператором (стр.1-30):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Конкретный вид функции  $W$  зависит от характера силового поля.

1) Потенциальная энергия тела массы  $m$  на высоте  $h$ :

$$W = -\int_0^h \vec{P}d\vec{r} = \int_0^h mgdx = mgh$$

2) Потенциальная энергия упругодеформированного тела.

$$W = -\int_0^x Fdx = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2}$$

### 35. Поле сил тяготения.

**Закон всемирного тяготения.** Между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$  — **гравитационная постоянная**.

Эта сила называется **гравитационной**, или **силой всемирного тяготения**. Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения, или гравитационного поля.

На примере гравитационного поля рассмотрим понятия **напряженности** поля и **потенциала** поля.

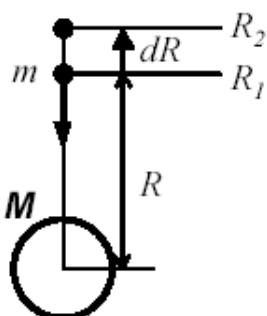
**Напряженность поля тяготения** это физическая величина, равная отношению силы, действующей со стороны поля на помещенное в него тело (материальную точку), к массе этого тела. Напряженность является **векторной силовой** характеристикой поля тяготения.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$$

В гравитационном поле Земли  $\vec{F} = m\vec{g}$ , откуда  $E = g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{(R_3 + h)^2}$ ,

где  $R_3$  — радиус Земли, масса которой  $M$ ,  $h$  — расстояние от центра тяжести тела до поверхности Земли. При перемещении тела массой  $m$  на расстояние

$dR$  поле тяготения совершает работу  $dA = \vec{F}d\vec{R} = -G \frac{mM}{R^2} dR$  (знак минус



потому, что сила и перемещение *противонаправлены*).

При перемещении тела с расстояния  $R_1$  до расстояния  $R_2$ :

$$A = -\int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = -m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right)$$

Работа не зависит от траектории перемещения, а определяется только начальным и конечным положениями тела.

Следовательно, силы тяготения *консервативны*, а поле тяготения является *потенциальным*. Работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии системы с обратным знаком.  $A = -(W_2 - W_1)$ . Поэтому,

**потенциальная энергия поля сил тяготения:**  $W = -G \frac{mM}{R}$

Для любого потенциального поля можно определить **скалярную энергетическую** характеристику поля — **потенциал**.

**Потенциалом поля тяготения** в данной точке поля называется скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии материальной точки, помещенной в рассматриваемую точку поля, к массе материальной точки:

$$\left| \varphi = \frac{W}{m} = -G \frac{M}{R} \right.$$

Рассмотрим связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью:

$$dA = -md\varphi, \quad dA = Fdr = mgdr \Rightarrow g = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad \vec{g} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$$

В общем случае для любого потенциального поля между напряженностью и потенциалом существует связь:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$$

Эта формула является следствием соотношения  $\vec{F} = -\text{grad} \Pi = -\nabla \Pi$ . Знак **минус** указывает на то, что вектор напряженности направлен в сторону **убывания** потенциала.

### 36. Космические скорости.

**Первой космической скоростью** называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т.е. превратиться в искусственный спутник Земли.

$$\frac{GmM}{R^2} = ma_n = m \frac{v_1^2}{R} \quad (2^{\text{й}} \text{ закон Ньютона}); \quad g = \frac{P}{m} = \frac{GM}{R^2} \quad (R - \text{ радиус Земли})$$

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ км/с} \quad (\text{у поверхности Земли } (h \rightarrow 0))$$

**Второй космической скоростью** называется наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца. В этом случае кинетическая энергия тела должна быть равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_R^\infty G \frac{mM}{r^2} dr = \frac{GmM}{R} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ км/с}$$

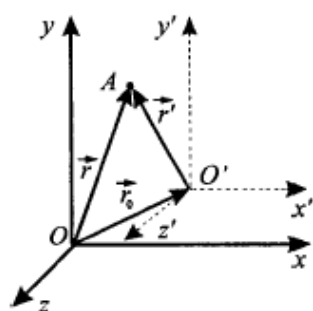
**Третьей космической скоростью** называется скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца:  $v_3 = 16,7 \text{ км/с}$ .

## Элементы специальной теории относительности

### 37. Преобразования Галилея

В классической механике, при скоростях тел значительно меньших, чем скорость света ( $v \ll c$ ), справедлив *механический принцип относительности*

(принцип относительности Галилея): законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.



Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему  $K$  (с координатами  $x, y, z$ ), которую будем считать неподвижной, и систему  $K'$  (с координатами  $x', y', z'$ ), движущуюся относительно  $K$  равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью  $\vec{u} = \text{const}$ .

В начальный момент времени начала координат  $O$  и  $O'$  этих систем совпадают.

В произвольный момент времени  $t$ :  $\vec{r}_0 = \vec{u}t$ .

Для произвольной точки  $A$ :  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t$ . Или в проекциях на оси координат:

$$x = x' + u_x t, \quad y = y' + u_y t, \quad z = z' + u_z t.$$

Эти соотношения называются **преобразованиями координат Галилея**.

Продифференцировав их по времени получим правило сложения скоростей в классической механике:

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, поэтому к преобразованиям Галилея можно добавить еще одно соотношение:  $t = t'$

Ускорение в системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаково:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'$ . Это и служит доказательством принципа относительности Галилея.

### 38. Постулаты Эйнштейна.

1) **Принцип относительности**: никакие опыты, проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможность обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны* по отношению к переходу от одной системы отсчета к другой.

2) **Принцип инвариантности скорости света**: *скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

### 39. Преобразования Лоренца.

Пусть система  $O'$  движется относительно системы  $O$  со скоростью  $v = \text{const}$ , причем  $v \approx c$  ( $c$  — скорость света (скорость распространения электромагнитных взаимодействий) в вакууме). Обозначим отношение скоростей  $v$  и  $c$  через  $\beta = v/c$ . Пусть вектор скорости  $\vec{v}$  направлен вдоль оси  $OX$ . Тогда релятивистские преобразования координат и времени будут иметь вид:

Эти соотношения — **преобразования Лоренца** — при  $v \ll c$  переходят в преобразования Галилея.

Они устанавливают взаимосвязь пространства и времени — в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени — пространственные координаты.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y &= y', \quad z = z', \\ t &= \frac{t' + \frac{v x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\}$$

Следствием этого является тот факт, что если два события в системе  $O$  происходят одновременно но в разных точках ( $t_1 = t_2, x_1 \neq x_2$ ), то в системе  $O'$



эти события, оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными.

Пусть в некоторой точке  $x$  в системе  $O$  происходит событие длительностью  $\tau = t_2 - t_1$ , то в системе  $O'$  длительность этого же события

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau$$

Т.о. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси  $x'$  и покоящийся относительно системы  $O'$ . Его длина в системе  $O'$  будет  $l'_0 = x'_2 - x'_1$ . Чтобы определить длину  $l = x_2 - x_1$  этого стержня в системе  $O$ , относительно которой он движется со скоростью  $v$ , измерим координаты его концов  $x_1$  и  $x_2$  в один и тот же момент времени  $t$ .

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} > l$$

Размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения, причем **лоренцово сокращение длины** тем больше, чем больше скорость движения. Поперечные размеры тел не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Если материальная точка движется в системе  $O'$  вдоль оси  $x'$  со скоростью  $v'$ , а сама система  $O'$  движется со скоростью  $u$  относительно системы  $O$ , то **релятивистский закон сложения скоростей**:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}$$

В качестве величины, **инвариантной** по отношению к преобразованию координат в четырехмерном пространстве Эйнштейна (**не зависящей от выбора системы отсчета**) вводится **интервал между событиями**:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2},$$

где  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = l_{12}$  — расстояние между точками обычного трехмерного пространства. Обозначив  $t_{12} = t_2 - t_1$ , получим

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$$

#### 40. Основные соотношения релятивистской динамики

**Релятивистская масса**  $m$  движущихся релятивистских частиц (тел) зависит от их скорости.

$m_0$  — **масса покоя** частицы, т.е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, в которой частица находится в покое.

**Релятивистский импульс**  $\vec{p}$ . **Релятивистский импульс системы сохраняется.** Закон сохранения релятивистского импульса — следствие **однородности пространства**.

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

**Основной закон релятивистской динамики:**

Законы классической динамики получаются из законов релятивистской динамики в предельном случае  $v \ll c$  (или  $c \rightarrow \infty$ ). Т.о. классическая механика – это механика макротел, движущихся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света в вакууме).

**Полная энергия тела** массы  $m$ :

Соотношение  $E = mc^2$  носит универсальный характер, оно применимо ко всем формам энергии, т.е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она не была, связана масса  $m = E/c^2$  и, наоборот, со всякой массой связана энергия. Покоящееся тело обладает энергией:  $E_0 = m_0 c^2$ , называемой **энергией покоя**.

**Полная энергия замкнутой системы сохраняется.** Закон сохранения энергии — следствие однородности времени.

**Кинетическая энергия:**  $K = E - E_0 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ .

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом тела:

$$E^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Величина  $E^2 - p^2 c^2 = E_0^2$  является инвариантом системы.

В случае, когда масса покоя частицы равна нулю, то  $E^2 - c^2 p^2 = 0$ . Следовательно, такая частица может обладать отличными от нуля энергией и импульсом только в том случае, когда она движется со скоростью света. К таким частицам относятся фотоны.

**Основной вывод теории относительности** — пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи — пространство-время.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Основные понятия математического аппарата физики

#### **1. Понятие производной функции.**

Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если существует предел разностного отношения функции  $f$  в точке  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Этот предел называется **производной** функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается:

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \left( \frac{df}{dx} \right) (x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

## 2. Производные некоторых элементарных функций.

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= a^x \ln a & (\sin x)' &= \cos x \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (x^n)' &= nx^{n-1} & (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

## 3. Частная производная.

Пусть функция  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Функция  $f$  называется дифференцируемой по  $x_k$ , если существует предел разностного отношения

$$\lim_{x_k \rightarrow x_k^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)}{x_k - x_k^0}$$

этот предел называется **частной производной функции**  $f$  (по  $x_k$ ) в точке  $P_0$

и обозначается:  $\frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_k}$  или  $f'_{x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0)$

## 4. Полный дифференциал функции $f$ в точке $P_0$ :

$$df(P) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(P_0) \cdot (x_k - x_k^0)$$

## 5. Определенный интеграл.

Пусть функция  $f(x)$  определена и ограничена на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем этот отрезок на "элементарные" отрезки введением  $n$  точек  $x_i$  следующим образом:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Обозначим через  $dx$  длину элементарного отрезка  $dx = x_i - x_{i-1}$ . В каждом элементарном отрезке выберем произвольное число  $\xi_i$  ( $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ).

Число  $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  называется **интегральной суммой**.

Функция  $f(x)$  называется интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ , если существует число  $I$  со следующим свойством: для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при любом разбиении на отрезки  $dx$ , для которого  $dx < \delta$ , выполняется неравенство  $|\sigma - I| < \varepsilon$  независимо от выбора  $\xi_i$ .

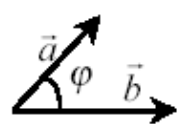
Число  $I$  называется **определенным интегралом** функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается:  $I = \int_a^b f(x)dx$ . Здесь  $x$  называется **переменной интегрирования**,  $a$  и  $b$  — соответственно **нижним и верхним пределами** интегрирования.

## 6. Вектор.

**Геометрический вектор**  $\vec{a}$  — это направленный отрезок в пространстве. Длина вектора  $\vec{a}$  называется его **модулем** и обозначается:  $a = |\vec{a}|$ .

В **прямоугольной декартовой системе** координат каждый вектор  $\vec{a}$  можно однозначно представить в виде  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы (**орты**) по осям координат  $x, y, z$ . Числа  $a_x, a_y, a_z$  называются **прямоугольными декартовыми координатами** вектора  $\vec{a}$ .

### 7. Скалярное произведение векторов.

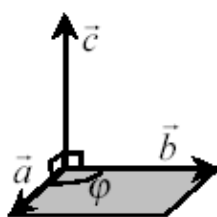


Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть **число**

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

### 8. Векторное произведение векторов.



Под векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  понимают **вектор**  $\vec{c}$ , имеющий длину  $c = ab \sin \varphi$  (площадь параллелограмма, построенного на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  как на сторонах) и направленный перпендикулярно к  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем так, что векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют **правую тройку векторов**.

$$\text{Обозначение: } \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \equiv \vec{a} \times \vec{b}$$

### 9. Скалярное поле.

Если каждой точке  $M$  пространства ставится в соответствие скалярная величина  $U$ , то возникает **скалярное поле**  $U(M)$  (например, поле температуры неравномерно нагретого тела, поле плотности в неоднородной среде, поле электростатического потенциала). Если  $M$  имеет декартовы координаты  $(x, y, z)$ , то пишут  $U = U(x, y, z)$  или  $U = U(\vec{r})$  с векторным аргументом (радиусом вектором)  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

### 10. Векторное поле.

Если каждой точке  $M$  ставится в соответствие вектор  $\vec{V}$ , то говорят о **векторном поле**  $\vec{V}(M)$  (например, поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное поле Солнца, поле электрической напряженности, поле магнитной напряженности). В декартовых координатах:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z) = \vec{V}(\vec{r}) = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k}$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор. Компоненты  $V_x, V_y, V_z$  образуют **три скалярных поля** и однозначно определяют  $\vec{V}(\vec{r})$  — векторную функцию векторного аргумента.

### 11. Производная по направлению.

Пусть скалярное поле  $U(\vec{r})$  имеет в некоторой точке  $M_0$  значение  $U_0$ , и пусть при перемещении  $\vec{ds}$  по направлению вектора  $\vec{s}$  мы приходим из точки  $M_0$  в точку  $M$ , где скалярное поле имеет значение  $U_s$ . Приращение  $U$  при этом перемещении равно  $dU = U_s - U_0$ . Предел отношения этого приращения

$dU$  к численной величине перемещения  $ds$  называется **производной скаляра  $U$  в точке  $M_0$  по направлению  $\vec{s}$** :

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{U_s - U_0}{ds}$$

Значение этой производной **существенно зависит** от выбора направления  $\vec{s}$  и ее ни в коем случае **нельзя смешивать** с обыкновенной частной производной по скалярному параметру  $s$ . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, часто такую производную обозначают:  $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}}$ .

## 12. Градиент.

Градиентом поля  $U(\vec{r})$  называется **вектор**, определяемый в каждой точке поля соотношением:

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

Тогда  $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial s} = \vec{n} \text{grad} U$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении  $\vec{s}$ .

Часто вектор  $\text{grad} U$  обозначают также  $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}}$  или  $\nabla U$ , где  $\nabla$  ("набла") обозначает символический вектор, называемый **оператором Гамильтона** или **набла-оператором**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

## 13. Поток поля через поверхность.

Разобьем данную поверхность  $S$  на  $n$  элементарных площадок размером  $\Delta S_i$ . Внутри каждой площадки выберем точку  $M_i$  и в этой точке построим нормальный к поверхности единичный вектор  $\vec{n}$  и вектор  $\vec{\Delta S}_i = \vec{n} \Delta S_i$  направление которого  $\vec{n}$ , а модуль  $\Delta S_i$ . Тогда мы определяем:

$$1) \text{ поток скалярного поля: } \mathfrak{S} = \int_S U \vec{dS} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n U(M_i) \vec{\Delta S}_i$$

$$2) \text{ скалярный поток векторного поля: } \mathfrak{S} = \int_S \vec{V} \vec{dS} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{V}(M_i) \vec{\Delta S}_i$$

$$3) \text{ векторный поток векторного поля: } \mathfrak{S} = \int_S [\vec{V}, \vec{dS}] = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\vec{V}(M_i), \vec{\Delta S}_i]$$

## 14. Производная по объему.

Под производными по объему скалярного или векторного полей в точке  $M$  понимают величины трех типов, которые получают следующим образом.

(1) Точка  $M$  окружается замкнутой поверхностью  $S$ , которая охватывает область с объемом  $V$ . (2) Вычисляется интеграл  $\mathfrak{R}$  по поверхности  $S$ :

$\mathfrak{K} = \oint_S U \vec{dS}$ , или  $\mathfrak{K} = \oint_S \vec{V} \vec{dS}$ , или  $\mathfrak{K} = \oint_S [\vec{V}, \vec{dS}]$ . (3) Определяется предел  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{K}}{V}$  отношения этого интеграла к объему  $V$ , когда  $S$  стягивается в точку  $M$ , так что  $V$  стремится к нулю.

### 15. Дивергенция векторного поля.

**Дивергенцией** (обозначается  $\operatorname{div} \vec{V} \equiv \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla \vec{V}$ ) векторного поля  $\vec{V}(M)$  называют следующую производную по объему поля в точке  $M$ :

$$\operatorname{div} \vec{V}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{V} \vec{dS}}{V}$$

Величина  $\oint_S \vec{V} \vec{dS}$  есть **скалярный поток векторного поля** через замкнутую поверхность  $S$ , которая окружает точку  $M$  и охватывает область  $G$  с объемом  $V$ .

Дивергенция  $\operatorname{div} \vec{V}$  есть **мера источников поля**  $\vec{V}(M)$ . Если в области  $G$   $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ , то векторное поле  $\vec{V}(M)$  называется свободным от источников. Те точки поля, в которых  $\operatorname{div} \vec{V} > 0$  принято называть **источниками** поля, а те, в которых  $\operatorname{div} \vec{V} < 0$  — **стоками** поля.

### 16. Формула Гаусса-Остроградского.

Для пространственной области  $G$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ :

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{V} dv = \oint_S \vec{V} \vec{dS}$$

### 17. Оператор Лапласа.

Пусть  $U(M)$  — скалярное поле, тогда оператор Лапласа  $\Delta U$  определяется следующим образом:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

или в декартовых координатах:

Оператор Лапласа векторного поля:  $\Delta \vec{V}(M) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}(M) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V}(M)$

### 18. Ротор векторного поля.

Ротором (вихрем) векторного поля  $\vec{V}(M)$  называют следующую производную по объему поля в точке  $M$ :

Обозначается:

$$\operatorname{rot} \vec{V}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S [\vec{V}, \vec{dS}]}{V}$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{V} \right] \equiv [\nabla, \vec{V}]$$

### 19. Теорема Стокса.

Циркуляция векторного поля  $\vec{V}(M)$  по замкнутой кривой  $L$  равна потоку ротора этого поля через поверхность  $S$ , опирающуюся на кривую  $L$ :

$$\oint_L \vec{V} \vec{dr} = \int_S \operatorname{rot} \vec{V} \vec{dS}$$

### Примечание.

В этом приложении приведены определения некоторых математических понятий, часто используемых в курсе физики. Материал носит справочный характер, поскольку предполагается, что данные понятия известны читателю.

### ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Пропис- ные	Строч- ные	Название	Пропис- ные	Строч- ные	Название	Пропис- ные	Строч- ные	Название
Α	α	Άλφα	Ι	ι	Ίóta	Ρ	ρ	Ρο
Β	β	Βэта	Κ	κ	Κάππα	Σ	σ, ς	Σίγμα
Γ	γ	Γάμμα	Λ	λ	Λямбда	Τ	τ	Тау
Δ	δ	Дэльта	Μ	μ	Мю	Υ	υ	И-пси́лόν
Ε	ε	Э-пси́лόν	Ν	ν	Ню	Φ	φ	Фи
Ζ	ζ	Дзэ́та	Ξ	ξ	Кси	Χ	χ	Хи
Η	η	Э́та	Ο	ο	О-ми́крόν	Ψ	ψ	Пси
Θ	θ	Тэ́та	Π	π	Пи	Ω	ω	О-ме́га